

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ КВАЗІСТАТИКИ В ОБМЕЖЕНИХ
КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СТРУКТУРАХ**

Методом дельта-подібної послідовності запроваджено інтегральне перетворення Фур'є для обмеженого кусково-однорідного середовища в припущенні наявності спектрального параметру в умовах спряження та крайових умовах, які використовуються для розв'язування задач квазістатики в неоднорідних середовищах з урахуванням нестационарних режимів на краях та поверхнях контакту через наявність спектрального параметру.

By the method of delta-like sequence there has been instilled the Fourier integral transformation for the limited piece-homogeneous environment in assumption of the availability of spectral parameter in conditions of interface and edge conditions, which are used for solving quasistatics problems within heterogeneous environments, taking into account non-stationary modes on edges and surfaces of contact through the availability of spectral parameter.

Ключові слова: дельта-подібна послідовність, інтегральне перетворення Фур'є, задача квазістатики.

Побудуємо обмежений в області $D_n = \{(t, x) : t \geq 0; x \in I_n\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку параболічного типу для обмеженого n -складового неоднорідного середовища з нестационарним режимом тепломасообміну на лініях розділу $x = l_j, j = \overline{0, n}$

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} + \chi_m^2 T_m - a_m^2 \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} = f_m(t, x), \quad x \in (l_{m-1}, l_m), \quad m = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

за початковими умовами

$$T_m(t, x)|_{t=0} = q_m(x); \quad x \in (l_{m-1}, l_m), \quad m = \overline{1, n+1}; \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left[\left(\alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t} \right] T_1(t, x)|_{x=l_0} = \omega_0(t), \quad (3)$$

$$\left[\left(\alpha_{22}^{n+1} + \delta_{22}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{22}^{n+1} + \gamma_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial t} \right] T_{n+1}(t, x)|_{x=l_n} = \omega_n(t) \quad (4)$$

та умовами спряження

$$\left\{ \left[\left(\alpha_{j1}^k + \delta_{j1}^k \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{j1}^k + \gamma_{j1}^k \frac{\partial}{\partial t} \right] T_k(t, x) - \left[\left(\alpha_{j2}^k + \delta_{j2}^k \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{j2}^k + \gamma_{j2}^k \frac{\partial}{\partial t} \right] T_{k+1}(t, x) \right\} \Big|_{x=l_k} = \omega_{jk}(t); \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Запишемо систему (1) і початкові умови (2) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_1^2 - a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_2^2 - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_2 \\ \dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \\ \dots \\ f_{n+1}(t, x) \end{bmatrix}; \quad \left[\begin{bmatrix} T_1(t, x) \\ T_2(t, x) \\ \dots \\ T_{n+1}(t, x) \end{bmatrix} \right]_{t=0} = \begin{bmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ \dots \\ q_{n+1}(x) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Інтегральний оператор F_n зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$F_n[...] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(x, \beta_m) \sigma_1 dx \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(x, \beta_m) \sigma_2 dx \dots \int_{l_{n-1}}^{l_n} \dots V_n(x, \beta_m) \sigma_n dx \int_{l_n}^{l_{n+1}} \dots V_{n+1}(x, \beta_m) \sigma_{n+1} dx \right]. \quad (7)$$

Припустимо, що $\max\{\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_n^2, \chi_{n+1}^2\} = \chi_{n+1}^2$. Позначимо через $\gamma_i^2 = \chi_{n+1}^2 - \chi_i^2 \geq 0, i = \overline{1, n}$. До задачі (6) застосуємо, за правилом множення матриць, операторну матрицю-рядок (7).

Для одержання розв'язку спочатку розглянемо на множині

$$I_n = \{x : x \in (l_0, l_1) \cup (l_1, l_2) \cup \dots \cup (l_n, +\infty); l_0 \geq 0\}$$

задачу Штурма – Ліувілля знаходження ненульового розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь, породжених оператором Фур'є другого порядку

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \bar{b}_j^2 \right) V_j = 0, \quad \bar{b}_j^2 = \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{a_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (8)$$

за крайовими умовами

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{11}^0 \right) V_1 \right]_{x=l_0} = 0, \quad \left[\left(\tilde{\alpha}_{22}^{n+1} \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{22}^{n+1} \right) V_{n+1} \right]_{x=l_{n+1}} = 0 \quad (9)$$

та умовами спряження

$$(\tilde{a}_{j1}^k \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{j1}^k) V_k - (\tilde{a}_{j2}^k \frac{d}{dx} + \beta_{j2}^k) V_{k+1} \big|_{x=l_k} = 0, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

За наявності фундаментальної системи розв'язків $\{\cos b_j x, \sin b_j x\}_{j=1}^{n+1}$, розв'язок крайової задачі (8) – (10) будемо за правилами:

$$V_j(x, \beta) = A_j(\beta) \cos q_j x + B_j(\beta) \sin q_j x, \quad j = \overline{1, n+1}. \quad (11)$$

Підставивши (11) в (9) і (10), отримаємо алгебраїчну систему з $(2n+2)$ рівнянь для визначення сталих A_j, B_j .

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{11}^{01}(q_1 l_0) A_1 + \tilde{v}_{11}^{02}(q_1 l_0) B_1 &= 0, \\ \tilde{v}_{j1}^{k1}(q_k l_k) A_k + \tilde{v}_{j1}^{k2}(q_k l_k) B_k - \tilde{v}_{j2}^{k1}(q_{k+1} l_k) A_{k+1} - \tilde{v}_{j2}^{k2}(q_{k+1} l_k) B_{k+1} &= 0, \quad j = 1, 2; k = \overline{1, n}, \\ \tilde{v}_{22}^{n+1,1}(q_{n+1} l_{n+1}) A_{n+1} + \tilde{v}_{22}^{n+1,2}(q_{n+1} l_{n+1}) B_{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для того, щоб однорідна алгебраїчна система (12) мала ненульовий розв'язок, необхідно і досить, щоб її визначник

$$\delta_n(\beta) \equiv -\omega_{n1}(\beta) \tilde{v}_{22}^{n+1,2}(q_{n+1} l_{n+1}) + \omega_{n2}(\beta) \tilde{v}_{22}^{n+1,1}(q_{n+1} l_{n+1}) = 0. \quad (13)$$

Оскільки $\delta_n(\beta)$ є цілою аналітичною функцією від β , то трансцендентне рівняння (13) має зліченну множину коренів, які не мають скінченної граничної точки. Корені $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ рівняння (13) утворюють дискретний спектр: корені дійсні, прості (за винятком, можливо, нуля), симетрично розташовані відносно нуля і утворюють монотонно зростаючу послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = +\infty$. При цьому кожному власному числу β_n відповідає власна вектор-функція

$$V(x, \beta_n) = \{V_1(x, \beta_n); V_2(x, \beta_n); \dots; V_{n+1}(x, \beta_n)\}.$$

Структуру функцій $V(x, \beta_n)$ одержимо, підставивши $\beta = \beta_n$ в систему (13) і відкинувши останнє рівняння внаслідок їх лінійної залежності.

Якщо позначити $A_1 \equiv A_0 \omega_{02}(\beta)$, $B_1 \equiv -A_0 \omega_{01}(\beta)$ і за першу компоненту власної вектор-функції, визначеної на інтервалі (l_0, l_1) , взяти функцію

$$V_1(x, \beta_n) = A_0(\beta_n) [\omega_{02}(\beta_n) \cos q_{1n} x - \omega_{01}(\beta_n) \sin q_{1n} x],$$

де $q_{1n} = \frac{\sqrt{\beta_n^2 + \gamma_1^2}}{a_1}$, то отримаємо рекурентні залежності:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{1}{c_{21,k} q_{k+1,n}} \left[A_k \Psi_{12}^k(q_{kn} l_k, q_{k+1,n} l_k) + B_k \Psi_{22}^k(q_{kn} l_k, q_{k+1,n} l_k) \right], \\ B_{k+1} &= \frac{1}{c_{21,k} q_{k+1,n}} \left[A_k \Psi_{11}^k(q_{kn} l_k, q_{k+1,n} l_k) + B_k \Psi_{21}^k(q_{kn} l_k, q_{k+1,n} l_k) \right], k = \overline{1, n}. \\ A_k &= \frac{A_0}{\prod_{i=1}^k c_{21,i} q_{i+1,n}} \omega_{k2}(\beta_n); \quad B_{k+1} = -\frac{A_0}{\prod_{i=1}^k c_{21,i} q_{i+1,n}} \omega_{k1}(\beta_n). \end{aligned} \quad (14)$$

Якщо прийняти $A_0 = \prod_{i=1}^n c_{21,i} q_{i+1,n}$, то компоненти V_j спектральної вектор-функції $V(x, \beta_n)$ матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} V_m(x, \beta_n) &= A_0 (\omega_{m-1,2}(\beta_n) \cos q_{mn} x - \omega_{m-1,1}(\beta_n) \sin q_{mn} x), \quad m = \overline{1, n}; \\ V_{n+1}(x, \beta_n) &= (\omega_{n,2}(\beta_n) \cos q_{n+1,n} x - \omega_{n,1}(\beta_n) \sin q_{n+1,n} x), \end{aligned}$$

а сама вектор-функція буде визначена

$$V(x, \beta_n) = \sum_{j=1}^{n+1} V_j(x, \beta_n) \theta(x - l_{j-1}) \theta(l_j - x),$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Хевісайда.

Перевіримо, що система власних вектор-функцій $\{V(x, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на множині I_n з ваговою функцією

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_j \theta(x - l_{j-1}) \theta(l_j - x), \quad \text{де } \sigma_k = \frac{1}{a_k^2} \prod_{m=k}^n \frac{c_{11,m}}{c_{21,m}}; \quad \sigma_{n+1} = \frac{1}{\alpha_{n+1}^2}, k = \overline{1, n}.$$

Дійсно, розглянемо дві власні вектор-функції $V(x, \beta_j)$ і $V(x, \beta_i)$, які відповідають двом власним значенням $\beta_j \neq \beta_i$. Згідно з тотожностями

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + q_{mj}^2 \right) V_m(x, \beta_j) &\equiv 0, \\ \left(\frac{d^2}{dx^2} + q_{mi}^2 \right) V_m(x, \beta_i) &\equiv 0, \quad m = \overline{1, n+1} \end{aligned}$$

одержимо співвідношення

$$V_m(x, \beta_j) V_m(x, \beta_i) = \frac{a_m^2}{\beta_i^2 - \beta_j^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(V_m(x, \beta_i) \frac{d}{dx} V_m(x, \beta_j) - V_m(x, \beta_j) \frac{d}{dx} V_m(x, \beta_i) \right). \quad (15)$$

Помножимо рівність (15) на $\sigma_s ds$, проінтегруємо від l_0 до l_{n+1} і просумуємо по s від 1 до $n+1$.
Одержимо рівність

$$\begin{aligned} \int_{l_0}^{l_{n+1}} V(x, \beta_j) V(x, \beta_i) \sigma(x) dx &= \sum_{m=1}^{n+1} \frac{\sigma_m a_m^2}{\beta_i^2 - \beta_j^2} \left(V_m(x, \beta_i) \frac{d}{dx} V_m(x, \beta_j) - V_m(x, \beta_j) \frac{d}{dx} V_m(x, \beta_i) \right) \Big|_{l_{m-1}}^{l_m} = \\ &= \frac{1}{\beta_i^2 - \beta_j^2} \left(-\sigma_1 a_1^2 \left(V_1(l_0, \beta_i) \frac{d}{dx} V_1(l_0, \beta_j) - V_1(l_0, \beta_j) \frac{d}{dx} V_1(l_0, \beta_i) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(V_{n+1}(l_{n+1}, \beta_i) \frac{d}{dx} V_{n+1}(l_{n+1}, \beta_j) - V_{n+1}(l_{n+1}, \beta_j) \frac{d}{dx} V_{n+1}(l_{n+1}, \beta_i) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n [\sigma_k a_k^2 (V_k(x, \beta_i) V'_k(x, \beta_j) - V_k(x, \beta_j) V'_k(x, \beta_i)) - \sigma_k a_{k+1}^2 (V_{k+1}(x, \beta_i) V'_{k+1}(x, \beta_j) - V_{k+1}(x, \beta_j) V'_{k+1}(x, \beta_i))] \Big|_{x=l_k} \right) \quad (16) \end{aligned}$$

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_{l_0}^{l_{n+1}} V(x, \beta_i) V(x, \beta_j) \sigma(x) dx &= -\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0 \gamma_{11}^0 + \delta_{11}^0 \beta_{11}^0} \left[\delta_{11}^0 V_1'(l_0, \beta_i) + \gamma_{11}^0 V_1(l_0, \beta_i) \right] \times \\ &\times \left[\delta_{11}^0 V_1'(l_0, \beta_j) + \gamma_{11}^0 V_1(l_0, \beta_j) \right] - \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1}}{-\delta_{22}^{n+1} \beta_{22}^{n+1} + \alpha_{22}^{n+1} \gamma_{22}^{n+1}} \left[\delta_{22}^{n+1} V_{n+1}'(l_{n+1}, \beta_i) + \gamma_{22}^{n+1} V_{n+1}(l_{n+1}, \beta_i) \right] \times \\ &\times \left[\delta_{22}^{n+1} V_{n+1}'(l_{n+1}, \beta_j) + \gamma_{22}^{n+1} V_{n+1}(l_{n+1}, \beta_j) \right] - G_n(\beta_i, \beta_j) \equiv -G_n^{(1)}(\beta_i, \beta_j). \quad (17) \end{aligned}$$

Якщо визначити узагальнений скалярний добуток

$$(V(x, \beta_i), V(x, \beta_j))_1 = \int_{l_0}^{l_{n+1}} V(x, \beta_i) V(x, \beta_j) \sigma(x) dx + G_n^{(1)}(\beta_i, \beta_j), \quad (18)$$

то з рівності (17) випливає, що для всіх $\beta_i \neq \beta_j$

$$(V(x, \beta_i), V(x, \beta_j))_1 = 0.$$

Остання рівність означає, що система власних вектор-функцій $\{V(x, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ узагальнено ортогональна на множині I_n з ваговою функцією $\sigma(x)$.

Рівність (18) породжує квадрат норми власної функції $V(x, \beta_j)$

$$\|V(x, \beta_j)\|_1^2 = \|V(x, \beta_j)\|^2 + G_n^{(1)}(\beta_j, \beta_j).$$

Можна показати, що узагальнено ортогональна на множині I_n система власних вектор-функцій $\{V(x, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ повна і замкнута.

Справедлива теорема типу Стеклова.

Теорема 1. Будь-яка неперервно-диференційовна до третього порядку включно на множині I_n вектор-функція $f(x)$, яка задовольняє крайовим умовам (9) та умови спряження (10), зображається на кожній підмножині множини I_n абсолютно й рівномірно збіжним рядом Фур'є за системою власних вектор-функцій $\{V(x, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{l_0}^{l_{n+1}} f(\xi) V(\xi, \beta_n) \sigma(\xi) d\xi \frac{V(x, \beta_n)}{\|V(x, \beta_n)\|_1^2}. \quad (19)$$

Ряд Фур'є породжує пряме F_n й обернене F_n^{-1} інтегральні перетворення Фур'є із спектральним параметром на $(n+1)$ -шаровому сегменті:

$$F_n[f(x)] = \int_{l_0}^{l_{n+1}} f(x) V(x, \beta_n) \sigma(x) dx \equiv f_n, \quad (20)$$

$$F_n^{-1}[f_n] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{V(x, \beta_n)}{\|V(x, \beta_n)\|_1^2} \equiv f(x). \quad (21)$$

З метою застосування запровадженого інтегрального перетворення Фур'є для знаходження аналітичних розв'язків математичних моделей задач сформулюємо основну тотожність інтегрального перетворення.

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(x) \in C^{(3)}(I_n^+)$ задовольняє крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{11}^0 \right) f_1(x) \Big|_{x=l_0} = f_{10}, \quad \left(\tilde{\alpha}_{22}^{n+1} \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{22}^{n+1} \right) f_{n+1}(x) \Big|_{x=l_{n+1}} = f_{n+1,l} \quad (22)$$

і умови спряження (10), то справджується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора G_n :

$$F[G_n[f(x)]] = -\beta_n^2 f_n - \sigma_1 a_1^2 (\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \beta_n) f_{10} - \sum_{j=1}^{n+1} k_j^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} f_j(x) V_j(x, \beta_n) \sigma_j dx + \frac{V_{n+1}(l, \beta_n) f_{n+1,l}}{\tilde{\alpha}_{22}^{n+1}}. \quad (23)$$

Доведення. З умов спряження встановимо базову тотожність

$$\left[f_k(x) V'_k(x, \beta_n) - f'_k(x) V_k(x, \beta_n) \right] \Big|_{x=l_k} = \frac{C_{21,k}}{C_{11,k}} \left[f_{k+1}(x) V'_{k+1}(x, \beta_n) - f'_{k+1}(x) V_{k+1}(x, \beta_n) \right] \Big|_{x=l_k}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Якщо інтеграл в правій частині рівності (23) проінтегрувати двічі частинами, то одержимо:

$$\begin{aligned} F[G_n[f(x)]] &\equiv \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} V_j(x, \beta_n) \sigma_j dx = \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 \sigma_1 \left(f'_j V_j - f_j V'_j \right) \Big|_{l_{j-1}}^{l_j} + \sum_{j=1}^{n+1} \int_{l_{j-1}}^{l_j} f_j \left(a_j^2 \frac{d^2}{dx^2} V_j \right) \sigma_j dx = \\ &= -a_1^2 \sigma_1 \left(f'_1 V_1 - f_1 V'_1 \right) \Big|_{l_0} + \left(f'_{n+1} V_{n+1} - f_{n+1} V'_{n+1} \right) \Big|_{l_{n+1}} + \sum_{j=1}^3 \int_{l_{j-1}}^{l_j} f_j(x) V_j(x, \beta_n) \left(-a_j^2 \frac{\beta_n^2 + \gamma_j^2}{\alpha_j^2} \right) \sigma_j dx. \end{aligned}$$

Розклавши суму на два доданки, отримаємо тотожність (23).

Тотожність (23) дає можливість будувати точний аналітичний розв'язок математичної моделі задачі квазістатисти (1) – (5).

Повернувшись до (6) і застосувавши тотожність (23), одержимо задачу Коші:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\beta_m^2 + \chi_{n+1}^2) \right] T_m(t) = F_m(t), \quad T_m(t) \Big|_{t=0} = q_m. \quad (24)$$

Тут прийняті позначення:

$$T_m(t) = \sum_{j=1}^{n+1} T_{jm}(t), \quad T_{jm}(t) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} T_j(t, x) V_j(x, \beta_m) \sigma_j dx;$$

$$F_m(t) = f_m(t) + \frac{\sigma_1 a_1^2}{\delta_{11}^0 \beta_{11}^0 - \alpha_{11}^0 \gamma_{11}^0} \left[\delta_{11}^0 V'_1(l_0, \beta_m) + \gamma_{11}^0 V_1(l_0, \beta_m) \right] \omega_0(t) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\alpha_{22}^{n+1} \gamma_{22}^{n+1} - \delta_{22}^{n+1} \beta_{22}^{n+1} \right)^{-1} \left[\delta_{22}^{n+1} V'_{n+1}(l_{n+1}, \beta_m) + \gamma_{22}^{n+1} V_{n+1}(l_{n+1}, \beta_m) \right] \omega_1(t) + \\
 & + \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2 \sigma_k}{c_{11,k}} \left[\left(\tilde{\alpha}_{12}^k \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{12}^k \right) V_{k+1}(x, \beta_m) \Big|_{x=l_k} \omega_2(t) - \left(\tilde{\alpha}_{22}^k \frac{d}{dx} + \tilde{\beta}_{22}^k \right) V_{k+1}(x, \beta_m) \Big|_{x=l_k} \omega_1(t) \right], \\
 & f_m(t) = \sum_{j=1}^{n+1} f_{jm}(t), \quad q_m = \sum_{j=1}^{n+1} g_{jm}(x).
 \end{aligned}$$

Розв'язком задачі Коші (24) є функція

$$T_m(t) = e^{-(\beta_m^2 + \chi_{n+1}^2)t} q_m + \int_0^t e^{-(\beta_m^2 + \chi_{n+1}^2)(t-\tau)} F_m(\tau) d\tau. \quad (25)$$

Обернений оператор F_n^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$F_n^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \dots V_1(x, \beta_m) \left(\|V(x, \beta_m)\|_1^2 \right)^{-1} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \dots V_2(x, \beta_m) \left(\|V(x, \beta_m)\|_1^2 \right)^{-1} \\ \dots \\ \sum_{m=1}^{\infty} \dots V_{n+1}(x, \beta_m) \left(\|V(x, \beta_m)\|_1^2 \right)^{-1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Визначимо функції впливу

$$H_{jk}(t, x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \chi_{n+1}^2)t} \cdot \frac{V_j(x, \beta_m) V_k(\xi, \beta_m)}{\|V(x, \beta_m)\|_1^2}; \quad j, k = \overline{1, n+1}, \quad (27)$$

породжені неоднорідністю системи (1), функції Гріна

$$W_{0j}(t, x) = -\alpha_1^2 \sigma_1 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \chi_{n+1}^2)t} \cdot \frac{V_1(l_0, \beta_m) V_j(x, \beta_m)}{\left[\alpha_{11}^0 - \delta_{11}^0 (\beta_m^2 + \chi_{n+1}^2) \right] \|V(x, \beta_m)\|_1^2}, \quad (28)$$

$$W_{ij}(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \chi_{n+1}^2)t} \cdot \frac{V_{n+1}(l, \beta_m) V_j(x, \beta_m)}{\left[\alpha_{22}^{n+1} - \delta_{22}^{n+1} (\beta_m^2 + \chi_{n+1}^2) \right] \|V(x, \beta_m)\|_1^2}, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (29)$$

породжені крайовими умовами в точках $x = l_0$ та $x = l \equiv l_{n+1}$ та функції Гріна

$$\Re_{jk}^{(1)}(t, x) = -\frac{\alpha_k^2 \sigma_k}{c_{11,k}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \chi_{n+1}^2)t} \cdot \frac{\tilde{\alpha}_{22}^k V'_{k+1}(l_k, \beta_m) + \tilde{\beta}_{22}^k V_{k+1}(l_k, \beta_m)}{\|V(x, \beta_m)\|_1^2} V_j(x, \beta_m), \quad (30)$$

$$\Re_{jk}^{(2)}(t, x) = -\frac{\alpha_k^2 \sigma_k}{c_{11,k}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \chi_{n+1}^2)t} \cdot \frac{\tilde{\alpha}_{12}^k V'_{k+1}(l_k, \beta_m) + \tilde{\beta}_{12}^k V_{k+1}(l_k, \beta_m)}{\|V(x, \beta_m)\|_1^2} V_j(x, \beta_m), \quad (31)$$

породжені умовами спряження в точках $x = l_k$.

Якщо тепер застосувати операторну матрицю-стовпець (26) до матриці-елемента $[T_m(t)]$, де функція $T_m(t)$ визначена формулою (25), то після елементарних перетворень отримаємо компоненти вектор-функції $T(t, x) = \{T_1(t, x), T_2(t, x), \dots, T_n(t, x), T_{n+1}(t, x)\}$

$$T_j(t, x) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{l_{k-1}}^{l_k} H_{jk}(t-\tau, x, \xi) (f_k(\tau, \xi) + q_k(\xi) \delta_+(\tau)) \sigma_k d\xi d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t (W_{0j}(t-\tau, x)\omega_0(\tau) + W_{ij}(t-\tau, x)\omega_1(\tau)) d\tau + \\
& + \sum_{k=1}^n \int_0^t (\Re_{jk}^{(1)}(t-\tau, x)\omega_{1k}(\tau) + \Re_{jk}^{(2)}(t-\tau, x)\omega_{2k}(\tau)) d\tau, \quad j = \overline{1, n+1},
\end{aligned} \tag{32}$$

яка повністю визначає єдиний розв'язок параболическої задачі (1) – (5).

За вказаною схемою можна знаходити розв'язки складніших задач квазістатисти, що приводяться до даної математичної моделі.

Список використаних джерел

1. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Шилов Г.Е. – М. : Наука, 1965. – 328 с.
2. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / Ленюк М.П. – К., 1983. – 62 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики ; 83.3).
3. Трасковецька Л.М. Математичне моделювання задач динаміки в обмежених кусково-однорідних середовищах із спектральним параметром / Л.М. Трасковецька // Збірник наукових праць факультету прикладної математики та комп'ютерних технологій Хмельницького національного університету. – 2009. – № 1 (2). – С. 69 – 74.
4. Трасковецька Л.М. Інтегральне перетворення Фур'є із спектральним параметром для напівобмеженого трискладового середовища / Збірник наукових праць факультету прикладної математики та комп'ютерних технологій Хмельницького національного університету. – 2008. – № 1. – С. 40 – 42.
5. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / Степанов В.В. – М. : Физматиз, 1959. – 468 с.